מיקום קבוצות תוכניות בהיררכיה האריתמטית

הגדרה. הקבוצות A, B נקראות **חשיבות ישירות** מן הקבוצות C, D אם קיימת פונקציה חשיבה F המעתיקה את A לתוך C ואת B לתוך D. היכן שאנו מזכירים רק קבוצה אחת בת הזוג השניה היא המשלים שלה. כך הקבוצה A חשיבה ישירות מן הקבוצה C אם קיימת פונקציה חשיבה F המעתיקה את A לתוך C ואת $X_1 \setminus A$ לתוך $X_2 \setminus C$, היכן ש-X_1 ו-X_2 הם המרחבים המתאימים.

משפט 1. הקבוצה Tot של (התוכניות של) הפונקציות השלמות היא Π_2-אוניברסלית.

הוכחה. $I \in \mathrm{Tot} \leftrightarrow \forall x \exists n (x \in W_{I,n})$, ולכן Tot היא Π_2.
תהי כעת $A = \{z \mid \forall x \exists y\, R(z,x,y)\}$, היכן ש-$R$ יחס חשיב, קבוצה Π_2 כלשהיא. תהי F פונקציה כך שלכל z $F(z)$ היא תוכנית אשר לקלט x היא עוברת על המספרים y עד שהיא מוצאת מספר y המקיים $R(z,x,y)$ ואז היא נותנת פלט כלשהו. ברור כי F היא חשיבה. ברור גם כי $x \in W_{F(z)}$ אסם $\exists y R(z,x,y)$, ולכן $[F(z)]$ היא פונקציה שלמה אסם $\forall x \exists y R(z,x,y)$, כלומר אסם $z \in A$.

משפט 2. הקבוצה Tot חשיבה ישירות מן הקבוצות $\mathrm{Tot}, \mathrm{Fin}$ היכן ש-Fin היא קבוצת כל (התוכניות של) הפונקציות שתחומן סופי.

הוכחה. תהי F הפונקציה המעתיקה את התוכנית I לתוכנית J שלכל קלט x היא מפעילה את I, לפי הסדר, על כל המספרים הקטנים או שווים ל-x. לכן החישוב של J ל-x מסתיים אסם החישוב של I מסתיים לכל $y \leq x$. אם $[I]$ היא פונקציה שלמה אז גם $[J]$ כן. אם $[I]$ היא פונקציה לא שלמה יהי y המספר המזערי שאינו ב- W_I ואז החישוב של J ל-x אינו מסתיים לאף $x \geq y$ ו- $W_J = \{0, \ldots, y-1\}$, ואז $J \in \mathrm{Fin}$.

מסקנה. הקבוצה Fin היא Σ_2-אוניברסלית.

הוכחה. Fin היא Σ_2 כי לכל I $\;I \in \mathrm{Fin} \leftrightarrow \exists z \forall x \forall n (x > z \to x \notin W_{I,n})$.
אם A קבוצה Σ_2 אז משלימתה B היא Π_2. לפי משפט 1 קיימת פונקציה חשיבה F המעתיקה את B ל-Tot ואת A למשלימת Tot. לפי משפט 2 קיימת פונקציה חשיבה G המעתיקה את את Tot לעצמה ואת משלימתה ל-Fin. לכן GF היא פונקציה חשיבה המעתיקה את A ל-Fin ואת המשלים של A ל-Tot הזרה ל-Fin. כך A חשיבה ישירות מ-Fin.

משפט 3. הקבוצות $\mathrm{Tot}, \mathrm{Fin}$ חשיבות ישירות מן הקבוצות $\mathrm{Tot}, \mathrm{Cof} \setminus \mathrm{Tot}$, היכן ש-$\mathrm{Cof}$ היא קבוצת כל (התוכניות של) הפונקציות שתחומן הוא משלים של קבוצה סופית.

הוכחה. עלינו להגדיר פונקציה חשיבה F מהתוכניות לתוכניות כך ש:
א. אם $[I]$ היא פונקציה שלמה אז גם $[F(I)]$ כן. ב. אם $I \in \mathrm{Fin}$ אז הפונקציה $[F(I)]$ מוגדרת לכל x פרט למספר סופי, אבל לא לכל x.
תחילה נדאג לכך ש-$F[I]$ יקיים את א'. לשם כך הפעלת $F[I]$ על x מריצה במקביל שני חישובים וכאשר אחד מהם מסתיים החישוב כולו מסתיים. החישוב הראשון הוא החישוב של I ולכן היכן ש-$[I]$ מוגדר גם $[F(I)]$ מוגדר, ובמיוחד אם $[I]$ פונקציה שלמה גם $[F(I)]$ כן.
החישוב השני צריך להיות כזה שאם $I \in \mathrm{Fin}$ אז $[F(I)]$ מוגדרת ל-x-ים מספיק גדולים. נעשה אותו כך: הפעלת $F(I)$ על x מבצעת x צעדים בחישוב של I לכל מספר $y < x$. אם אחד החישובים הללו מסתיים בדיוק אחרי x צעדים אז $[F(I)]$ אינו מוגדר ל-x, ואחרת $[F(I)]$ מוגדר. תחילה נוכיח כי אם $I \in \mathrm{Fin}$ אז החישוב השני מסתיים עבור x-ים מספיק גדולים. יהי u המספר הראשון הגדול מכל איברי תחום $[I]$ ויהי z האורך המירבי של החישובים המסתיימים של I עבור x-ים הקטנים מ-u, ו- $z = 0$ אם $u = 0$.
ברור שלכל $x > z$ אין חישוב של $[I]$ לאף y המסתיים בדיוק אחרי x צעדים. לכן לכל $x > z$ החישוב השני של $F[I]$ מסתיים, וכך קיים $W_{F(I)} \supseteq \{x \mid x > z\}$.

הוכחת המשפט תסתיים כאשר נראה שיש x כך ש-$[F(I)]$ אינה מוגדרת עבורו, ולשם כך אנו זקוקים ל- $u \geq x$ כך שהחישוב השני אינו מסתיים ל-x. המועמד הראשון ל-x כזה הוא u עצמו. אם יש $x < u$ שהחישוב של I עבורו מסתיים בדיוק ב-u צעדים אז, לפי הגדרתו, החישוב השני אינו מסתיים עבור u. כמו כן, אם יש $x < u$ שהחישוב של I עבורו מסתיים בדיוק ב-$v > u$ צעדים אז, לפי הגדרתו, החישוב השני אינו מסתיים עבור v. נשארנו עם המקרה בו החישוב של I עבור כל $x < u$ מסתיים ב-פחות מ-u צעדים. כדי להתמודד עם מקרה זה נשנה קלות את הגדרת החישוב השני ונקבע שהפעלתו על x נעשית כדלקמן. אם $x = 0$ אז החישוב אינו מסתיים, ואם $x > 0$ אז אם קיים $y < x$ שהחישוב של I עבורו מסתיים ב-x- $z_y <$ צעדים ומקיים $x = z_y + y + 2$ אז החישוב השני אינו מסתיים, ואחרת הוא מסתיים, נאמר בתוצאה 0. אם $u = 0$ אז שני החישובים אינם מסתיימים עבור 0. אם $u > 0$ אז $z_{u-1}+(u-1)+2 > u$ ולכן שני החישובים אינם מסתיימים עבור $x = z_{u-1} + u + 1$. לכן כאשר $I \in \text{Fin}$ $F(I)$ אינה פונקציה שלמה.

משפט 4. הקבוצה Cof היא Σ_3 אוניברסלית.

הוכחה. לכל תוכנית I קיים $I \in \text{Cof} \leftrightarrow \exists x \forall y \exists n(y > x \rightarrow y \in W_{I,n})$, ולכן Cof היא Σ_3.

תהי A קבוצה Σ_3 כלשהי, אז קיים יחס Π_2 B כך שלכל x $\exists y B(x,y) \leftrightarrow x \in A$. $\exists y B(x,y)$ שקול כמובן ל- $\exists y(\exists z < y)B(x,z)$. כידוע גם $(\exists z < y)B(x,z)$ הוא יחס Π_2 והוא בעל התכונה שאם הוא קיים ל-y מסויים אז הוא גם קיים לכל y גדול ממנו. לכן, ללא הגבלת הכלליות אנו יכולים להניח שהיחס B הוא כך שאם $B(x,y)$ ו- $y' > y$ אז גם $B(x,y')$. לפי משפטים 1 ו-2 קיימת פונקציה חשיבה F מקבוצת הזוגות של המספרים הטבעיים לקבוצת התוכניות כך שלכל x,y אם קיים $B(x,y)$ אז $F(x,y) \in \text{Tot}$, ואחרת $F(x,y) \in \text{Cof} \setminus \text{Tot}$. למספר טבעי x תהי $G(x)$ תוכנית שעבור הקלט y,z מחשבת את $[F(x,y)](z)$. ברור שאפשר לקבוע את $G(x)$ כך ש-G תהיה פונקציה חשיבה. נראה ש-G היא פונקציה המחשבת את A ישירות מ- Cof. אם $x \in A$ אז החל מ-y מסויים, שנסמנו ב-y_0, קיים $B(x,y)$ ולכן $F(x,y) \in \text{Tot}$, כלומר עבור $y \geq y_0$ $[F(x,y)](z)$ מוגדר לכל z. ל- $y < y_0$ לא קיים $B(x,y)$ ולכן $F(x,y) \in \text{Cof}$, כלומר לכל $y < y_0$ $[F(x,y)](z)$ מוגדר לכל z פרט למספר סופי של z-ים. לכן, עבור ה-x הנתון $[G(x)](y,z) = [F(x,y)](z)$ מוגדר לכל הזוגות y,z, פרט למספר סופי, כלומר $G(x) \in \text{Cof}$. אם $x \notin A$ אז לכל y $B(x,y)$ אינו קיים ולכן $F(x,y) \in \text{Cof} \setminus \text{Tot}$. אם כן, הפונקציה $[F(x,y)]$ אינה שלמה וקיים z_y כך ש- $[G(x)](y,z_y) = [F(x,y)](z_y)$ אינו מוגדר. כך הפונקציה $G(x)$ אינה מוגדרת עבור אינסוף הזוגות y, z_y ולכן $G(x) \notin \text{Cof}$.

תרגיל. א. תהי A קבוצת כל התוכניות של הפונקציה הקבועה 0. מקם את A בהיררכיה האריתמטית והוכח ש-A היא שלמה באותה קבוצה.

ב. בהינתן פונקציה חשיבה מסויימת F פעל כמו ב-א' על הקבוצה A של כל התוכניות של F.